



## DISEÑO DE LOSAS FLOTANTES PARA MONTAJE DE EQUIPOS SENSIBLES A VIBRACIONES EN NAVES INDUSTRIALES

JOSÉ E. STUARDI, MARCELO A. CEBALLOS, RAÚL J. RITTA, JULIO C. MASSA

Universidad Nacional de Córdoba

Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales  
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina

(Recibido 7 de diciembre de 2011, para publicación 10 de febrero de 2012)

**Resumen** – Cada vez es más frecuente la utilización de equipamiento moderno y sensible en plantas industriales, donde los niveles de vibraciones son altos. Las instalaciones deben cumplir con las especificaciones de los fabricantes de las máquinas en cuanto a los límites máximos tolerados, lo que puede conseguirse con montajes adecuados. Una solución alternativa al montaje elástico directo o aislamiento individual para cada equipo, es optar por superficies aisladas o losas flotantes, lo que provee una mayor flexibilidad al layout. Para el diseño de losas flotantes son utilizados habitualmente modelos simplificados de un grado de libertad, despreciando la influencia de la flexibilidad flexional de las losas y la contribución a la respuesta de los modos flexionales. La excitación de base rígida es además una simplificación frente a la excitación real consistente en trenes de ondas propagadas por la superficie de base donde apoyan los aisladores. En el presente trabajo se investiga la respuesta dinámica de losas aisladas contra vibraciones y excitadas desde la base y a través del sistema de aislamiento, por ondas superficiales propagadas en el semiespacio homogéneo de suelo, teniendo además en cuenta la flexibilidad de las losas. La efectividad del aislamiento se cuantifica a partir de los desplazamientos máximos de la losa calculados en el dominio de la frecuencia para una excitación con ancho de banda dentro del rango de interés de los equipamientos comerciales típicos. El análisis comienza por la transmisibilidad de vigas resuelta en forma analítica, de lo que surge el concepto de transmisibilidad modal y transmisibilidad modal envolvente. Estos parámetros provenientes de una estructura unidimensional resultan convenientes para ser utilizados como referencia en el diseño de losas flotantes industriales. A modo de ejemplo se estudió una sala de metrología para la cual se contrastaron resultados provenientes de un análisis por elementos finitos con los obtenidos con el modelo de viga equivalente aquí propuesto.

**Palabras clave** – Equipamiento sensible, losas flotantes, aislamiento de vibraciones.

### 1. INTRODUCCIÓN

La transmisibilidad de vibraciones a un sistema dinámico desde su base es usualmente descrita en función de la frecuencia de excitación utilizando como parámetro a la relación de amortiguamiento del sistema aislado. Este modelo de oscilador simple resulta aplicable en masas suspendidas, constituidas por máquinas, equipamientos y fundaciones, que pueden asumirse como bloques rígidos dentro del rango de frecuencias de interés. Las losas estructurales protegidas mediante aislamiento de base, que son utilizadas para soportar equipos sensibles, constituyen un tipo de estructura más complejo que requiere consideraciones más detalladas. Los modos flexionales pueden adquirir una influencia notable en la transmisibilidad vertical de la losa cuando la fuente excitatriz posee contenidos de frecuencias próximas a las frecuencias propias del sistema, produciendo resonancias capaces de degradar la efectividad del sistema de aislamiento.

Los efectos de la resonancia de losas flotantes utilizadas en el aislamiento de vibraciones inducidas por el movimiento de trenes en la cercanía de edificios han sido estudiados a partir de la década del 70. Saurmann *et al.* [1] reportaron que los efectos debidos a la flexibilidad de las losas impiden reducciones de transmisibilidad mayores a 20 dB. Lombaert *et al.* [2,3] estudiaron la efectividad de sistemas de losas flotantes diseñadas para el control de vibraciones inducidas por trenes, Kawaharazuka *et al.* [4] realizaron mediciones de vibraciones en modelos de losas flotantes en escala real notando la degradación de la efi-

ciencia por los modos flexionales y Cox *et al.* [5] estudiaron las vibraciones medidas en un modelo, llegando a similares conclusiones respecto de los picos en la respuesta obtenidos. Hui y Ng [6,7] estudiaron la eficiencia de pisos y salas flotantes para controlar la transmisión de vibraciones y ruido estructural, reportando mejoras en la transmisibilidad mediante la incorporación de rigidizadores que aumentan las frecuencias propias flexionales y por el posicionamiento de los aisladores en los nodos de los primeros modos. Si bien estos antecedentes se refieren en general al aislamiento de la emisión generada por el tránsito de trenes, donde existen condicionamientos derivados de la dinámica de losas, deflexión, fatiga de rieles, estabilidad, etc., que no existen en el caso tratado en este artículo, comparten la misma problemática referente a la transmisibilidad.

Un aspecto original del presente trabajo, es la consideración de trenes de ondas armónicas propagadas en el suelo como fuente de excitación; para el estudio de la transmisibilidad se asume que los aisladores se encuentran apoyados sobre un semiespacio homogéneo de suelo caracterizado por una velocidad de propagación de ondas superficiales (ondas de Rayleigh). Se asume además que la fuente excitatriz se encuentra a una distancia suficientemente alejada del sistema aislado cuando se la compara con sus dimensiones, lo que permite adoptar un frente de onda plano y perpendicular a la dirección de propagación, mientras que el decaimiento de amplitudes del movimiento de la superficie del terreno es despreciado. Estas hipótesis permiten reducir el número de parámetros involucrados sin desmejorar las conclusiones obtenidas en cuanto a la identificación de los principales parámetros que afectan la transmisibilidad de las losas aisladas, lo que constituye un objetivo primario del presente trabajo. Debido a la complejidad del análisis, el estudio de las losas requiere un tratamiento numérico, del que no surge en forma explícita la relación entre los parámetros que influyen sobre la transmisibilidad. El estudio en forma analítica de vigas, en cambio, permite relacionar el caso básico del oscilador simple con losas apoyadas sobre elementos discretos. Por ese motivo, en el presente trabajo se investiga el caso unidimensional en forma detallada, para obtener conclusiones aplicables al caso bidimensional mostrando la forma de acoplamiento entre la excitación armónica espacial en la base de los aisladores con los modos flexionales de la estructura.

## 2. TRANSMISIBILIDAD DE VIGAS SOBRE FUNDACIONES ELÁSTICAS

Se considera a continuación una viga apoyada sobre un sistema elástico continuo sometida a ondas armónicas actuando en su base, por lo que cobra importancia la longitud de onda de la excitación y su velocidad de propagación sobre la superficie del terreno.

### 2.1. Viga flexible sobre fundación elástica

La ecuación diferencial de una viga flexible provista de amortiguamiento viscoso ha sido p.e. tratado por Clough y Penzien [8]. Agregando a ese análisis la consideración de una viga con amortiguamiento de tipo histerético, además del apoyo sobre una fundación flexible con amortiguamiento viscoso y la excitación por su base con una función  $v(x,t)$ , las ecuaciones que rigen el movimiento transversal de la viga  $u(x,t)$  resultan

$$EI \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} + EI\eta \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^4 \dot{u}(x,t)}{\partial x^4} \right) \left| \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4} \right| + ku(x,t) + c\dot{u}(x,t) + m\ddot{u}(x,t) = kv(x,t) + c\dot{v}(x,t) \quad (1)$$

donde  $m$  es la masa por unidad de longitud de la viga de largo  $L$ , apoyada sobre aisladores uniformemente distribuidos con rigidez  $k$  y amortiguamiento  $c$  por unidad de longitud. La rigidez flexional es  $EI$  y  $\eta$  representa el factor de pérdida del material de la viga. Los puntos sobre  $u$  y  $v$  representan derivadas temporales.

Basado en la existencia de una solución del tipo sincrónica,  $v(t)$  se expresa en forma separada como el producto de dos funciones, una dependiente del espacio y otra del tiempo, manteniéndose la misma hipótesis para el movimiento de la viga  $u(t)$ , esto es (ver Fig. 1)

$$v(x,t) = e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad u(x,t) = y(x) e^{i\omega t} \quad (2)$$

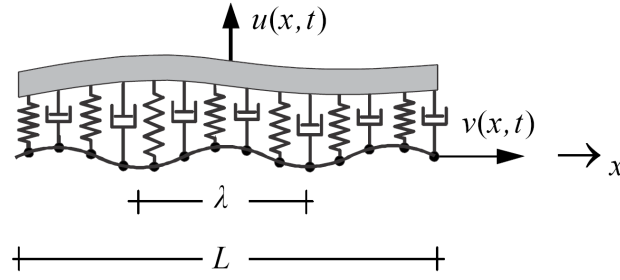


Fig. 1. Viga flexible apoyada sobre aisladores uniformemente distribuidos.

donde  $\omega$  es la frecuencia excitatriz de la carga armónica y  $\mathbf{k}$  es el número de onda que se obtiene a partir del la longitud de onda  $\lambda$  que a su vez depende de la velocidad de propagación de las ondas superficiales  $V_R$

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2\pi V_R}{\omega} \quad (3)$$

## 2.2. Análisis en el dominio de la frecuencia

Considerando la ecuación (2) se puede afirmar que en el segundo término de la ecuación (1) el signo de la velocidad está desfasado 90 grados respecto al desplazamiento

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{\partial^4 \dot{u}(x,t)}{\partial x^4}\right) = \frac{\frac{\partial^4 \dot{u}(x,t)}{\partial x^4}}{\left|\frac{\partial^4 \dot{u}(x,t)}{\partial x^4}\right|} = i \frac{\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}}{\left|\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}\right|} \quad (4)$$

Reemplazando las ecuaciones (2) y (4) en la (1), y eliminando la variable temporal se tiene

$$\alpha^4 (1+i\eta) \frac{\partial^4 y(v)}{\partial v^4} + (1+2i\xi\Omega - \Omega^2) y(v) = (1+2i\xi\Omega) e^{-i\kappa\Omega v} \quad (5)$$

donde se han utilizado los siguientes parámetros adimensionales

$$v = \frac{x}{L} \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \xi = \frac{c\omega_0}{2k} \quad (6)$$

siendo  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  la frecuencia propia del sistema del aislamiento y  $\xi$  su relación de amortiguamiento crítico. Por otro lado  $\alpha$  representa la rigidez flexional adimensional de la viga y  $\kappa$  el número de onda adimensional:

$$\alpha = \left(\frac{EI}{kL^4}\right)^{1/4} \quad \kappa = \frac{\omega_0 L}{V_R} = \frac{\mathbf{k}L}{\Omega} \quad (7)$$

## 2.3. Superposición modal

La utilización de la superposición modal permite un análisis más provechoso de la respuesta de la viga y la identificación de los factores que componen la función de transmisibilidad. Considerando  $\eta = c=0$ , en la homogénea de la ecuación (1), dividiendo por  $m$  y reemplazando la ecuación (2) se obtiene,

$$\left[\frac{EI}{m} \frac{\partial^4 y(x)}{\partial x^4} + \frac{k}{m} y(x)\right] f(t) + \ddot{f}(t) y(x) = 0 \quad (8)$$

Utilizando los parámetros adimensionales de las ecuaciones (6) y (7), y ordenando los términos que dependen del tiempo y del espacio por separado, se tiene

$$\frac{\ddot{f}(t)}{f(t)} = -\left[\alpha^4 \omega_0^2 \frac{\partial^4 y(\nu)}{\partial \nu^4} + \omega_0^2 y(\nu)\right] \frac{1}{y(\nu)} \quad (9)$$

La ecuación anterior puede ser escrita como dos problemas de valores propios independientes, a saber

$$-\left[\alpha^4 \omega_0^2 \frac{\partial^4 y(\nu)}{\partial \nu^4} + \omega_0^2 y(\nu)\right] = \lambda y(\nu) \quad (10)$$

$$\ddot{f}(t) = \lambda f(t) \quad (11)$$

Reemplazando la ecuación (11) en la (9) se obtiene

$$\alpha^4 \omega_0^2 \frac{\partial^4 y(\nu)}{\partial \nu^4} + \omega_0^2 y(\nu) = \tilde{\omega}_n^2 y(\nu) \quad (12)$$

$$\lambda = -\tilde{\omega}_n^2 \quad (13)$$

donde  $\tilde{\omega}_n$  representa a las frecuencias propias de la viga sobre fundación elástica. Reacomodando términos se puede llegar al problema de valores propios flexional de la viga sin fundación elástica, esto es, libre-libre:

$$\alpha^4 \omega_0^2 \frac{\partial^4 y(\nu)}{\partial \nu^4} = (\tilde{\omega}_n - \omega_0^2) y(\nu) = \bar{\omega}_n^2 y(\nu) \quad (14)$$

donde  $\bar{\omega}_n$  hace referencia a las frecuencias propias del problema libre-libre.

La ecuación (14) puede reescribirse como

$$\left(\alpha^4 \omega_0^2\right) \frac{\partial^4 y(\nu)}{\partial \nu^4} + \bar{\lambda} y(\nu) = 0 \quad (15)$$

Esta ecuación (15) ha sido extensamente estudiada, ver por ejemplo la referencia [9]. Sus valores propios son

$$\bar{\lambda} = -\bar{\omega}_n^2 \quad \bar{\omega}_n^2 = (\alpha^4 \omega_0^2) b_n^4 \quad (16)$$

donde los coeficientes  $b_n^4$  se calculan teniendo en cuenta las condiciones de borde de los extremos de la viga. Para el presente caso con ambos extremos libres resultan ser las raíces de la ecuación característica

$$\cos(b_n) \cosh(b_n) - 1 = 0 \quad (17)$$

mientras que los modos pueden escribirse como

$$\phi_n(\nu) = A_{1n} \cos(b_n \nu) + A_{2n} \sin(b_n \nu) + A_{3n} \cosh(b_n \nu) + A_{4n} \sinh(b_n \nu) \quad (18)$$

La ecuación (14) establece además que los valores propios del problema de la viga con fundación elástica resultan ser la suma de los valores propios correspondientes al problema flexional sin fundación elástica más el valor propio correspondiente al sistema de aislamiento, o sea

$$\tilde{\omega}_n^2 = \bar{\omega}_n^2 + \omega_0^2 \quad (19)$$

mientras que los modos de ambos problemas son los mismos. Finalmente, de las ecuaciones (19) y (16) las frecuencias adimensionales de los modos flexionales resultan

$$\tilde{\Omega}_n = \tilde{\omega}_n / \omega_0 = \sqrt{1 + \alpha^4 b_n^4} \quad (20)$$

A continuación se expande al movimiento transversal de la viga de manera que su variación espacial  $y(\nu)$  quede expresada en función de la superposición de la respuesta  $Y_n$  de los modos  $\phi_n(\nu)$  considerados, esto es

$$y(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\nu) Y_n \quad (21)$$

donde los modos han sido normalizados de modo que

$$\int_0^1 \phi_n^2(\nu) d\nu = 1 \quad (22)$$

Reemplazando las ecuaciones (15), (16) y (21) en la (5), multiplicando por un modo genérico  $\phi_n^T(\nu)$ , integrando en la longitud de la viga y teniendo en cuenta a las propiedades de ortogonalidad de los modos y la ecuación (22) se arriba a una expresión de la respuesta de los modos de la forma

$$Y_n = \frac{1 + 2i\xi\Omega}{1 + \alpha^4 b_n^4 - \Omega^2 + i(2\xi\Omega + \eta\alpha^4 b_n^4)} \int_0^L \phi_n(\nu) e^{-i\kappa\Omega\nu} d\nu \quad (23)$$

## 2.4. Transmisibilidad modal

Supuesta en la ecuación (2) una excitación unitaria, la ecuación (21) puede escribirse en forma de transmisibilidad como la suma de las contribuciones modales

$$TR(\nu, \Omega) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(\nu) Y_n(\Omega) \right| \quad (24)$$

A continuación se analizan las contribuciones de los distintos modos.

### 2.4.1 Contribución de modos de cuerpo rígido a la transmisibilidad

Los modos de cuerpo rígido pueden representarse por medio de la ecuación de la forma

$$\phi_0(\nu) = A + B\nu \quad (25)$$

En la Tabla 1 se presentan los parámetros  $A$  y  $B$  de las formas modales de translación  $0_1$  y rotación  $0_2$  según la ecuación (25). Sus frecuencias propias son nulas y las amplitudes máximas de los modos normalizados resultan 1 y  $\sqrt{3}$  respectivamente.

Reemplazando los parámetros modales de la Tabla 1 en (23) se arriba a

$$Y_{0_1} = \frac{1 + 2i\xi\Omega}{1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2} \frac{i}{\kappa\Omega} (e^{-i\kappa\Omega} - 1) \quad (26)$$

$$Y_{0_2} = \frac{1 + 2i\xi\Omega}{1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2} \frac{\sqrt{3}}{\kappa^2 \Omega^2} [(i\kappa\Omega - 2) + (i\kappa\Omega + 2)e^{-i\kappa\Omega}] \quad (27)$$

La contribución de los modos de cuerpo rígido a la transmisibilidad máxima en el extremo de la viga es

Tabla 1. Modos de cuerpo rígido.

$n$	$A$	$B$
$0_1$	1	0
$0_2$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

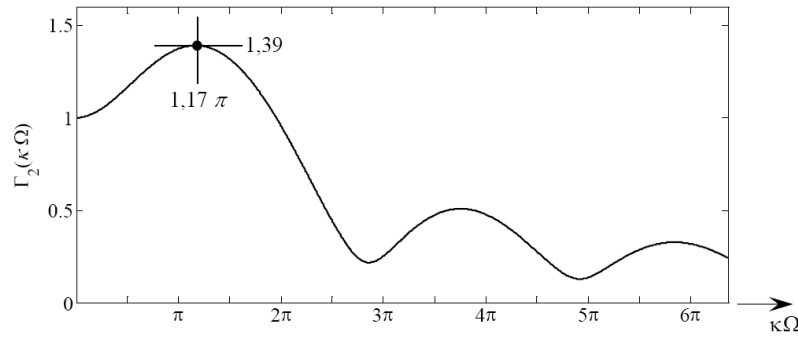


Fig. 2. Factor de transmisibilidad de viga rígida.

$$TR_0 = \left| Y_{01} + \sqrt{3} Y_{02} \right| = \Gamma_1(\xi, \Omega) \Gamma_2(\kappa\Omega) \quad (28)$$

donde

$$\Gamma_1(\xi, \Omega) = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\Omega)^2}}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}} \quad (29)$$

es la transmisibilidad de un sistema de 1 GL mientras que

$$\Gamma_2(\kappa\Omega) = \sqrt{\frac{\sin^2(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)^2} + 9 \left( \frac{\cos(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)} - \frac{\sin(\kappa\Omega/2)}{(\kappa\Omega/2)^2} \right)^2} \quad (30)$$

La transmisibilidad máxima de viga rígida resulta entonces el producto de la transmisibilidad de un sistema de 1 GL por un factor de transmisibilidad de viga rígida  $\Gamma_2(\kappa\Omega)$ . Ya que  $\kappa\Omega = \mathbf{k}L$ , este factor de transmisibilidad resulta dependiente de la cantidad de radianes de onda que entran en la longitud de viga. La Fig. 2 es una gráfica de la variación del factor de transmisibilidad  $\Gamma_2(\kappa\Omega)$ , que pasa por un máximo de 1.39 para  $\kappa\Omega = 1.17\pi$ .

#### 2.4.2 Contribución de modos flexionales a la transmisibilidad

La solución exacta de la ecuación característica (17) resulta

$$b_n = \pi(n + 1/2) + (-1)^{n-1} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arccos[\operatorname{sech}(n + 1/2)\pi] \right\} \quad (31)$$

mientras que los coeficientes  $A_{in}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  de la ecuación (18) pueden obtenerse a partir de [9]

$$A_{1n} = A_{3n} = 1 \quad ; \quad A_{2n} = A_{4n} = \frac{\cosh(b_n) - \cos(b_n)}{\sinh(b_n) + \sin(b_n)} \quad (32)$$

La Tabla 2 muestra los valores que toman  $b_n$  y  $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}$ , correspondientes a los primeros modos flexionales, observándose que los coeficientes A se mantienen constantes a partir del modo 4 para la representación decimal mostrada. Estos valores deben ser reemplazados en la ecuación (23) obteniendo  $Y_n$  y posteriormente en la ecuación (24) para obtener la transmisibilidad.

Tabla 2. Modos flexionales.

$n$	1	2	3	4	5	6	7
$b_n$	4.73004	7.85320	10.9956	14.1372	17.2788	20.4203	23.5619
$A_1=A_3$	1.00000	1.00000	1.00000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$A_2=A_4$	-0.98250	-1.00078	-0.99997	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

## 2.5. Forma aproximada de la contribución de modos flexionales a la transmisibilidad

A continuación se presentan expresiones aproximadas de las frecuencias propias y formas modales normalizadas de los modos flexionales, las que permiten obtener fórmulas explícitas de la respuesta  $Y_n$  de estos modos. Una forma aproximada de la ecuación (31) (indicada con el símbolo  $\hat{\ }^{\wedge}$ ) resulta

$$\hat{b}_n = \pi(n + 1/2) \quad (33)$$

mientras que la ecuación (19) junto con la Tabla 2 pueden escribirse en forma aproximada como

$$\hat{\phi}_n(\nu) = \cos(\hat{b}_n \nu) - \sin(\hat{b}_n \nu) + \exp(\hat{b}_n \nu) - (-1)^n \exp[-\hat{b}_n(1 - \nu)] \quad (34)$$

Mediante el uso de estas aproximaciones se obtiene para el primer modo un error máximo de 0.37% respecto del exacto, mientras que el coeficiente de correlación de Pearson entre el primer modo exacto y el aproximado difiere en sólo  $5 \times 10^{-07}$  de la unidad. Además para los modos de orden superior se consiguen errores que resultan monótonicamente menores.

Reemplazando las expresiones aproximadas (33) y (34) en (23) se arriba a

$$\hat{Y}_n = \Gamma_{1n} \Gamma_{2n} \quad (35)$$

donde  $\Gamma_{1n}$  y  $\Gamma_{2n}$  son los factores de la respuesta modal

$$\Gamma_{1n} = \frac{(1 + 2i\xi\Omega)}{\alpha^4 \pi^4 (n + 1/2)^4 (1 + i\eta) + 1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2} \quad (36)$$

$$\Gamma_{2n} = \frac{\left[ \begin{aligned} &\pi(n + 1/2) \left( 1 - (-1)^n e^{-i\kappa\Omega} \right) \left( 2(\kappa\Omega)^2 + ((\kappa\Omega)^2 - \pi^2(n + 1/2)^2) (-1)^n e^{-\pi(n + 1/2)} \right) - \\ &i\kappa\Omega \left( 1 + (-1)^n e^{-i\kappa\Omega} \right) \left( 2(\kappa\Omega)^2 - ((\kappa\Omega)^2 - \pi^2(n + 1/2)^2) (-1)^n e^{-\pi(n + 1/2)} \right) \end{aligned} \right]}{(\kappa\Omega)^4 - \pi^4(n + 1/2)^4} \quad (37)$$

El factor de respuesta modal  $\Gamma_{1n}$ , además de ser una función de la frecuencia  $\Omega$  depende de la rigidez flexional  $\alpha$ , el amortiguamiento  $\xi$  y el factor de pérdida  $\eta$  y conserva la forma característica típica de la función de transmisibilidad  $\Gamma_1$  entre la respuesta de la masa y el movimiento impuesto en la base en sistemas de 1 GL, ecuación (29). El factor de respuesta modal  $\Gamma_{2n}$  en cambio, depende de la integral del lado derecho de la ecuación (23), esto es, del producto interno de la forma modal y la onda excitatriz propagada. La Fig. 3 presenta el módulo del factor de  $\Gamma_{2n}(\kappa\Omega)$  para la viga flexible. La curva de cada modo  $n$  presenta en general un pico dominante de amplitud aproximada 0.7 y lóbulos posteriores y anteriores de menor amplitud. Los máximos de  $\Gamma_{2n}$ , se encuentran en

$$\kappa\Omega = 6.79, 9.34, 12.13, 15.04, 18.02, \dots \quad (n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots) \quad (38)$$

Nótese además a partir de esta figura que los ceros del denominador de la ecuación (37),

$$\kappa\Omega = \pi(n + 1/2) \quad (39)$$

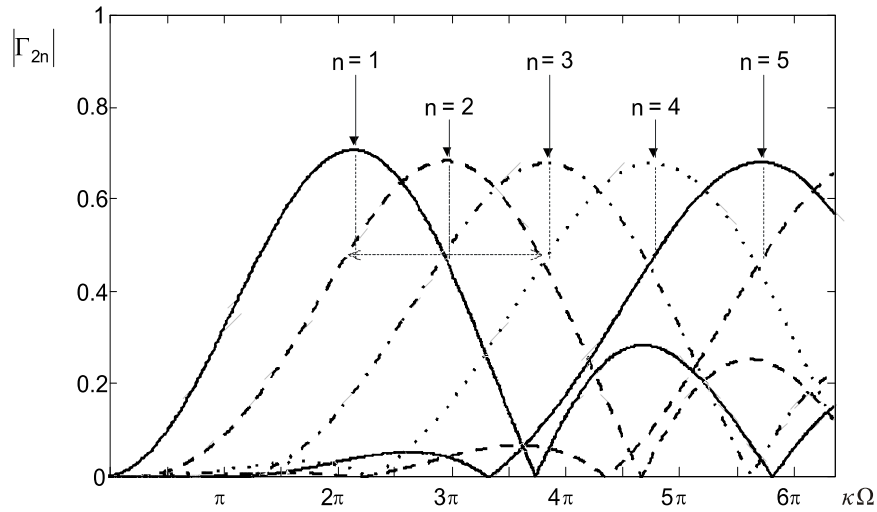


Fig. 3. Módulo del factor de respuesta modal  $\Gamma_{2n}$  para viga flexible.

representan una aproximación de la ocurrencia de los máximos del factor para modos de orden alto, en tanto que la aproximación resulta grosera para los primeros modos. Además utilizando la Fig. 3 se calcula que el ancho de banda de los lóbulos principales, esto es el rango de  $\kappa\Omega$  con amplitud igual a  $-3$  dB del máximo, es aproximadamente 5. Este ancho de banda ha sido indicado en el gráfico a modo de ejemplo para  $n = 2$ .

## 2.6. Transmisibilidad máxima envolvente modal

Partiendo de la ecuación de transmisibilidad (24), la ecuación (35) y analizando sólo la respuesta de un modo  $n$  individualmente, se puede definir una *transmisibilidad modal* como sigue

$$TR_n(\nu, \Omega) = \left| \phi_n(\nu) \Gamma_{1n}(\Omega) \Gamma_{2n}(\Omega) \right| \quad (40)$$

que representa la contribución individual de un modo  $n$  a la transmisibilidad.

A continuación se reemplazan en la ecuación (40) las siguientes condiciones de máximos, a saber:

- Condición a): El valor máximo espacial de cada modo normalizado asume el valor 2.
- Condición b): El valor máximo de  $\Gamma_{2n}$ , según Fig. 3 se aproxima a 0.7.

De esta manera se obtiene un valor de *transmisibilidad modal máxima*

$$TRm_n \approx 1.4 \left| \frac{1 + 2i\xi\Omega}{\alpha^4 \pi^4 (n + 1/2)^4 (1 + i\eta) + 1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2} \right| \quad (41)$$

Finalmente es posible obtener una envolvente de las transmisibilidades modales máximas, reemplazando en la ecuación (41) la

- Condición c): El valor máximo de  $\Gamma_{1n}$ , se puede aproximar en correspondencia con el cero de la parte real del denominador de la ecuación (36), esto es

$$\alpha^4 \pi^4 (n + 1/2)^4 = \Omega^2 - 1 \quad (42)$$

obteniendo

$$TR_{env}(\xi, \eta, \Omega) \approx \frac{1.4 \sqrt{1 + 4\xi^2\Omega^2}}{2\xi\Omega + \eta(\Omega^2 - 1)} \quad (43)$$



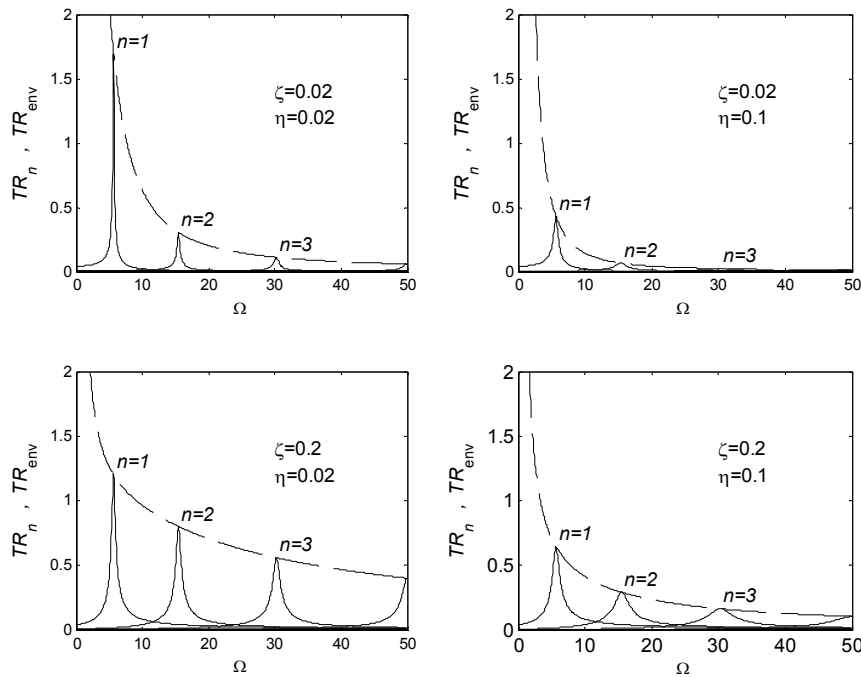


Fig. 4. Transmisibilidades modales y transmisibilidad envolvente para distintos valores de  $\xi$  y  $\eta$ .

La *transmisibilidad modal* envolvente  $TR_{env}$  puede interpretarse como la transmisibilidad máxima obtenible en cualquier punto a lo largo de la viga y calculada como la respuesta de un solo modo resonante, donde además el número de onda propicia la máxima excitación. Nótese además que sólo depende de la relación de amortiguamiento, del factor de pérdida y de la frecuencia adimensional. La transmisibilidad modal máxima y la transmisibilidad envolvente se grafican en la Fig. 4 para el caso de dos valores de  $\xi$  y dos valores de  $\eta$ . Ya que este parámetro proporciona mediante una fórmula explícita valores máximos aproximados de transmisibilidad, su valor puede ser utilizado como referencia, por lo que a continuación se analiza la probabilidad de su ocurrencia y la sensibilidad de su valor en función de las variables de diseño:

- Respecto de la localización del punto de medición de la transmisibilidad es habitual que se pretenda utilizar toda la superficie de la losa y sin distinción de grado de aislamiento, lo que justifica la consideración en forma conservativa de un máximo espacial local [Condición a) de máximo].
- Basándose en la existencia de una banda ancha de frecuencias de excitación, para los diseños habituales se admite que existan resonancias flexionales dentro del rango de frecuencias de interés. Exceptúan este caso sólo la presencia de bandas angostas generadas por ejemplo por máquinas operando en frecuencias fijas. En la Fig.3 se observa que el ancho de banda de cada lóbulo del  $|\Gamma_{2n}|$  resulta aproximadamente  $\kappa\Omega = 5$ , de manera que la sensibilidad del valor de la envolvente a este producto de parámetros es relativamente baja. Por la razón expuesta y como se aprecia en la Fig. 3, los máximos de la envolvente no decaen más del 30% entre la  $n$ -ésima curva considerada y las inmediatas inferior y superior.
- Respecto del ancho de banda de los picos de  $|\Gamma_{1n}|$  y partiendo de la ecuación (36), reemplazando la condición de máximos, ecuación (42), queda

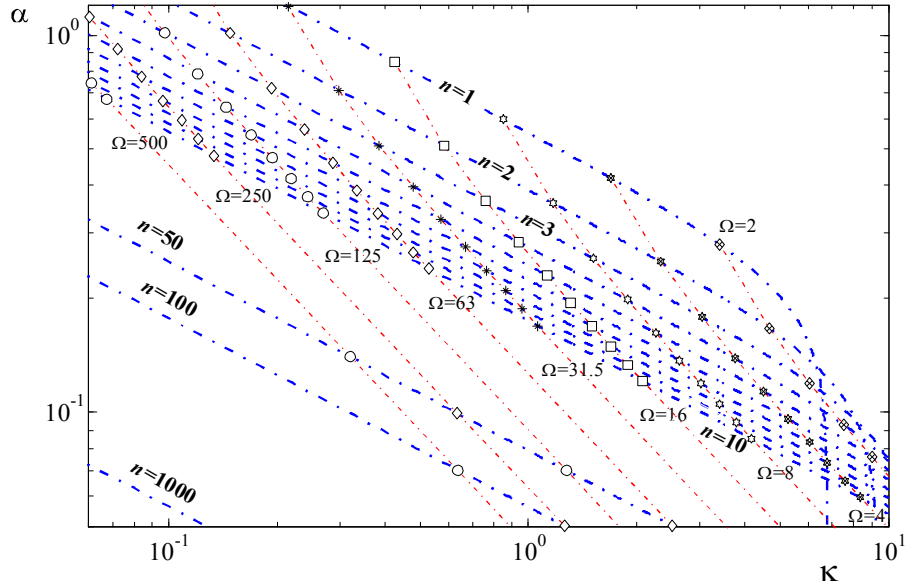


Fig. 5. Gráfico de diseño indicando curvas de ocurrencia de  $TR_{env}$ .

$$\Gamma_1 = \frac{1 + i2\xi\Omega}{i(\Omega^2 - 1)\eta + i2\xi\Omega} \quad (44)$$

Esta expresión permite analizar la contribución a la atenuación del amortiguamiento del aislamiento y del propio de la losa a la respuesta. De la ecuación (44) es evidente que el factor de pérdida de la losa no contribuye en la frecuencia natural del aislamiento cuando  $\Omega = 1$  mientras que en el caso  $\Omega \gg 1$

$$\Gamma_1 \Big|_{\Omega \gg 1} = \frac{1}{1 + \eta \Omega / (2\xi)} \quad (45)$$

su influencia en la respuesta es atenuadora y no amplificadora como en el caso de  $\xi$ , tal como es conocido de sistemas de 1 GLD [9]. Esto se ve reflejado en los cuatro gráficos que componen la Fig. 4, donde se observa que los gráficos de la segunda fila (correspondientes a  $\xi = 0.2$ ) tienen valores de envolvente máxima superiores a los de la primera fila (correspondientes a  $\xi = 0.02$ ) y que los mejores resultados para frecuencias relativamente altas se obtienen con una combinación de un  $\eta$  alto y un  $\xi$  bajo.

El factor de respuesta  $\Gamma_1$  es el causante de la aparición de puentes de transmisibilidad de la Fig. 4 y como  $\xi$  y  $\eta$  son normalmente valores pequeños, los anchos de banda resultan de la misma forma.

#### Curva de diseño $TR_{env}$ en coordenadas $\alpha$ - $\kappa$

En la Fig. 5 se grafican las *líneas de ocurrencia de la  $TR_{env}$*  en forma paramétrica para algunos valores seleccionados de  $n$  entre 1 y 1000. Estas líneas trazadas en forma de punto y trazo grueso indican puntos de coordenadas  $\alpha$ - $\kappa$  para los que se verifica la condición de ocurrencia de la transmisibilidad modal envolvente máxima de la ecuación (41). Además sobre las curvas citadas se indican valores referenciales discretos de la frecuencia adimensional  $\Omega$  para los que ocurren los máximos, estos valores a su vez están unidos por curvas de trazo fino (curvas de  $\Omega$  constante). Del gráfico es evidente que la esquina superior derecha es la única zona sin resonancias, que corresponde a valores de los parámetros  $\alpha$  y  $\kappa$  relativamente elevados. Además, para los primeros modos (a partir de  $n = 1$ ) se observan resonancias para valores pequeños del parámetro  $\alpha$  y elevados del parámetro  $\kappa$ , lo que corresponde a frecuencias adimensionales pequeñas, mientras que las frecuencias adimensionales mayores aparecen del lado izquierdo del gráfico en una zona de grandes  $\alpha$  y pequeños  $\kappa$ . El gráfico relaciona en definitiva valores de los parámetros  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $n$  y  $\Omega$  que generan valores de transmisibilidad de envolvente máxima, por lo que puede usarse en el diseño

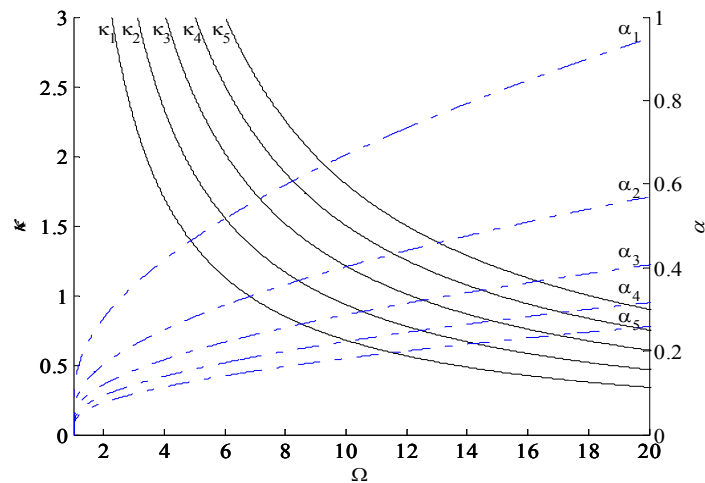


Fig. 6. Condición de máximos de  $\Gamma_{1n}$  y  $\Gamma_{2n}$  en función de  $\Omega$ .

y verificación de losas aisladas, evaluando la transmisibilidad modal máxima de la ecuación (41) y la transmisibilidad modal envolvente de la ecuación (43) y eventualmente teniendo en cuenta el decaimiento entre las líneas de ocurrencia de  $TR_{env}$ , según se comentó en el apartado anterior.

Finalmente debe tenerse en cuenta que la envolvente se refiere a la contribución a la transmisibilidad de un solo modo, aproximando mejor los casos en donde los modos próximos están desacoplados.

Como gráfico auxiliar de diseño, se muestran en la Fig. 6 curvas  $\kappa_n(\Omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots, 5$  representando la condición de ocurrencia de máximos de  $\Gamma_{2n}$ , según ecuación (38) y curvas  $\alpha_n(\Omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots, 5$  correspondientes a la condición de máximos de  $\Gamma_{1n}$ , según ecuación (42) en este caso sobre el eje ordenado secundario. Entrando al gráfico con el valor de  $\alpha$  en la ordenada derecha, se determinan las frecuencias propias en las intersecciones con las curvas  $\alpha_n(\Omega)$ , lo que corresponde al máximo de  $|\Gamma_{1n}|$  y a partir de estas puede verificarse la posibilidad de ocurrencia de máximos de  $|\Gamma_{2n}|$  comparando el valor de  $\kappa$  de diseño con el de la curva  $\kappa_n(\Omega)$  correspondiente.

### 3. TRANSMISIBILIDAD DE UNA LOSA SOBRE FUNDACIÓN ELÁSTICA

Las losas presentan algunas particularidades que no pueden inferirse del modelo de una viga flexible. La aparición de una cantidad relativamente grande de formas modales bidimensionales acopladas en ambas direcciones se traduce en la densa población de picos flexionales con frecuencias próximas. El *ángulo de incidencia* de las ondas propagadas respecto del eje longitudinal de la losa modifica la participación de los modos transversales y los modos acoplados en la respuesta y agrega un parámetro más para considerar. El coeficiente de Poisson es el responsable del acoplamiento bidimensional, por lo que para un valor nulo de este parámetro los modos flexionales puros coinciden con los de la viga.

Para el análisis de casos bidimensionales es necesario un cálculo por medio de Elementos Finitos. Estos resultados pueden ser contrastados con los obtenidos con modelos equivalentes de viga, en donde se considera como largo las dos dimensiones en planta de la losa, definiendo así dos parámetros  $\kappa$ .

## 4. RESULTADOS

### 4.1. Ejemplo de aplicación

Se considera una losa en hormigón armado de longitud 16.24 m, ancho 11.74 m y con un espesor de 30 cm. El peso propio resulta aproximadamente 1370 kN. La losa se encuentra aislada con una frecuencia

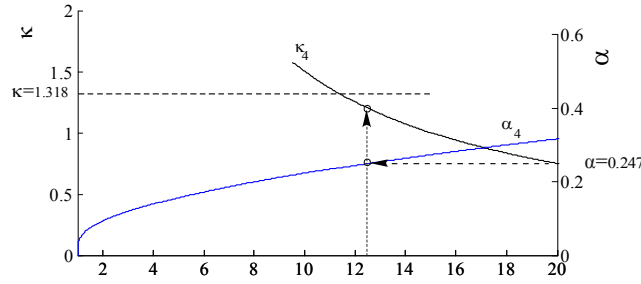


Fig. 7. Ocurrancia de transmisibilidad máxima para el ejemplo considerado.

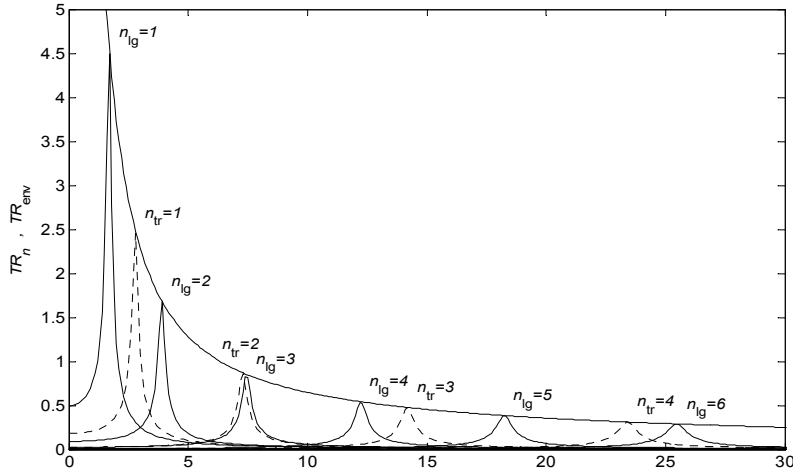


Fig. 8. Transmisibilidad modal y transmisibilidad envolvente máxima para el ejemplo considerado.

natural vertical de 3.2 Hz y con un amortiguamiento viscoso del 8%. Con los datos expuestos,  $\alpha$  se calcula como 0.247 en el sentido longitudinal y 0.342 en el sentido transversal. Considerando una velocidad de propagación de ondas  $V_R = 250$  m/s resulta un parámetro  $\kappa = 1.318$  (longitudinal) y 0.944 (transversal). Del gráfico de la Fig. 4 resulta una condición de diseño donde se generará un puente de transmisibilidad en el modo 4 y en el modo 2 tomando en cuenta el sentido longitudinal y transversal respectivamente. Del gráfico de la Fig. 7 se observa que, entrando con el valor de  $\alpha = 0.247$  en el eje ordenado derecho la línea horizontal interseca a  $\alpha_4$  en  $\Omega = 12.4$  (39.7 Hz) y que para este valor de frecuencia adimensional el valor de  $\kappa_4$  es muy próximo al del caso considerado, lo que indica una transmisibilidad próxima a la de la envolvente para  $n = 4$ . Para el caso transversal y con el mismo razonamiento se verifica una situación similar para  $n = 2$  y  $\Omega = 7.29$  (23.3 Hz) y transmisibilidades menores para  $n = 3$  y  $\Omega = 14.18$  (45.4 Hz).

En la Fig. 8 se graficaron las ecuaciones (41) y (43) para la losa de ejemplo. Se distinguen las contribuciones individuales de los modos longitudinales  $n_{lg} = 1, \dots, 6$  y de los transversales  $n_{tr} = 1, \dots, 6$ , además de la envolvente superior en contacto con los picos, indicando la curva de transmisibilidad para vigas siempre resonantes con la excitación.

#### 4.1.1. Comparación con modelo numérico de elementos finitos

Para la contrastación de los resultados se construye un programa de Elementos Finitos que modela losas rectangulares con mallado automático mediante elementos de placa en flexión de 3 GL por nudo y formulados en forma explícita, Przemieniecki [10]. El piso flotante analizado se modeló mediante una malla de  $20 \times 14$  elementos finitos, lo que permite lograr una exactitud de 0.1% en frecuencias naturales de hasta 50 Hz. El modelo contempla aisladores en cada nodo de la malla, simulando un apoyo continuo de forma de hacer posible comparaciones con resultados del medio continuo. Se adopta una excitatriz constituida por

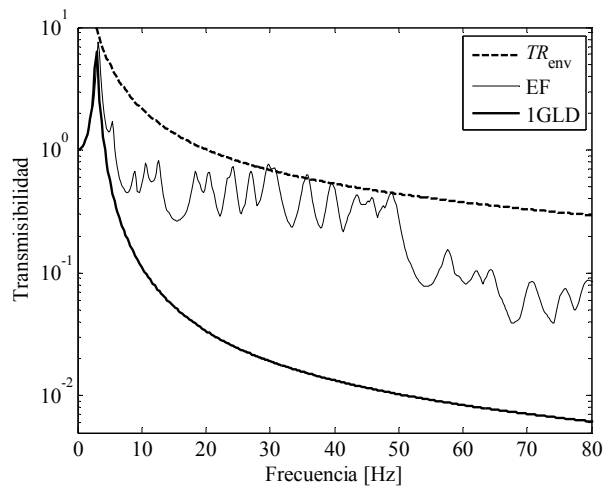


Fig. 9. Comparación de  $TR_{env}$  con transmisibilidades calculadas por envolventes numéricas (EF) y del modelo de 1GLD.

una onda propagada en el terreno sin decaimiento de amplitud y con un frente de onda plano. El problema de transmisión de trenes de ondas a la losa se resuelve en el dominio de la frecuencia.

Como se comentó en el apartado anterior, el ángulo de incidencia de la excitación modifica la respuesta de la losa generando una indeterminación respecto de un análisis general de la transmisibilidad de losas. Si se admite que la posición de la excitatriz es variable o la orientación de la losa no especificada, se puede nuevamente considerar el máximo de las respuestas posibles en todas las direcciones. Siguiendo este criterio, la Fig. 9 muestra envolventes máximas de series de valores obtenidos utilizando el modelo numérico de Elementos Finitos. Se graficaron las máximas transmisibilidades obtenidas en cualquier nodo de la losa y para distintos ángulos de incidencia de la excitación, variables de a  $15^\circ$  grados entre 0 y  $90^\circ$  (máximo local de 7 casos en total). En forma comparativa se observa la  $TR_{env}$  de la viga flexible de la ecuación (43) y finalmente se muestra la curva de transmisibilidad del sistema de 1 GLD de la ecuación (29).

La curva de transmisibilidad envolvente modal de viga flexible  $TR_{env}$  concuerda con los picos de la curva calculada en forma numérica en el rango 20 a 50 Hz. Este rango fue identificado como crítico en el análisis de la losa del apartado anterior, por la presencia de modos en resonancia con valores de transmisibilidad cercanos a los de la envolvente. Nótese precisamente que la transmisibilidad envolvente representa en esas frecuencias una muy buena aproximación al cálculo por elementos finitos, siendo sólo superada levemente y en forma puntual en la zona de 30 Hz debido a la contribución de modos acoplados. Del análisis del gráfico de la Fig. 9 queda demostrado en todos los casos que la curva de 1 GLD subestima en forma grosera las transmisibilidades máximas obtenibles en losas reales, por lo que no debe ser utilizada como referencia.

#### 4.1.2 Consideraciones sobre el amortiguamiento propio de la losa

La Fig. 9 muestra las curvas de transmisibilidad esperables en una losa flotante, a partir de los parámetros dimensionales básicos tomados desde el ejemplo. Admitiendo un ancho de banda relativamente amplio de la excitación, se tiene que es prácticamente inevitable la ocurrencia de resonancias flexionales de la losa. Del análisis anterior se hace obvia la conveniencia del aumento del factor de pérdida intrínseco del hormigón armado, lo que puede lograrse por medio de una técnica de tratamiento superficial. La Fig. 10 muestra la variación de la transmisibilidad envolvente en función de la frecuencia adimensional para tres factores de pérdida 0.025, 0.05 y 0.10, evidenciando de esta forma la atenuación causada por la disipación de energía en el seno del material de la losa.

El agregado de una o más capas de material viscoelástico de alta disipación mejora el comportamiento dinámico del conjunto, existiendo una variedad de métodos para considerar el efecto del amortiguamiento en sistemas de placas multicapas. En el presente trabajo se utilizan las ecuaciones de Ross *et al.* [11], que

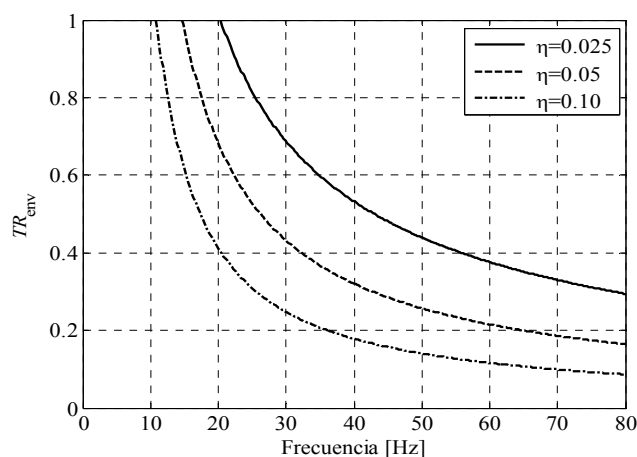


Fig. 10. Comparación de transmisibilidades envolventes para distintos factores de pérdida.

fueron desarrolladas para un total de 3 capas de material y considera deformaciones tanto flexionales como extensionales. Estas ecuaciones son válidas para vigas apoyadas vibrando en una frecuencia natural, pero pueden obtenerse valores aproximados de referencia del incremento del factor de amortiguamiento y de la rigidez para el presente caso de placas sobre fundación elástica. Ya que la capa superior de hormigón, que sirve de confinamiento del material viscoelástico, resulta de suma importancia para incrementar el amortiguamiento, es lógico pensar en términos de un rediseño de la losa más que en un tratamiento superficial.

El diseño optimizado puede resultar algo complicado en función de la cantidad de parámetros intervinientes, sumada a la fuerte dependencia del factor de pérdida con los modos a amortiguar, parametrizados en el número de semiondas del modo ' $n$ ', ver Mead [12]. Para el caso analizado es posible reemplazar el diseño original de losa de 30 cm de espesor, por una losa sándwich compuesta de una losa base de 20 cm de espesor, 1.2 cm de material viscoelástico y una losa superior de tránsito 10 cm.

Las propiedades del material utilizado en este estudio son las correspondientes al material comercial Sylodamp HD 300, con factor de pérdida 0.6 y módulo de Young  $E$  entre 5 y 20 MN/m<sup>2</sup>. En la Fig. 11 se muestra el factor de pérdida final (columna izquierda) y la rigidez de la losa sándwich relativa a la rigidez del proyecto original (columna derecha), en función de los espesores de capa viscoelástica (ordenada) y espesor de capa de confinamiento (abscisa).

Se ha utilizado como parámetro en los gráficos el número de semiondas de deformación en la losa  $n$ , mostrando en la primera fila de gráficos el caso de una semionda y en la segunda fila cinco semiondas. De esta forma, utilizando el mismo volumen de hormigón, se mantiene aproximadamente la misma rigidez flexional para los primeros modos, pero el factor de pérdida es aumentado de aproximadamente 0.02 a valores mayores a 0.1 (valores válidos dentro del rango de frecuencias de interés).

La elección de una losa base del mismo espesor que la losa de confinamiento hubiese ciertamente mejorado la performance del sistema, sin embargo se ha supuesto en el ejemplo que otros condicionamientos del montaje pueden hacer esto no preferible en la práctica

## 5. CONSIDERACIONES FINALES DE DISEÑO

En el presente trabajo se analiza la respuesta dinámica vertical de losas consideradas flexibles y aisladas del medio a través de dispositivos visco elásticos en su base, los que se disponen de forma que el sistema puede aproximarse a un apoyo continuo. Del análisis surgen numerosos parámetros adimensionales que deben ser tenidos en cuenta para lograr un buen diseño. Se considera en este apartado la cuantificación de los valores prácticos de diseño, teniendo en cuenta la aplicación de interés.

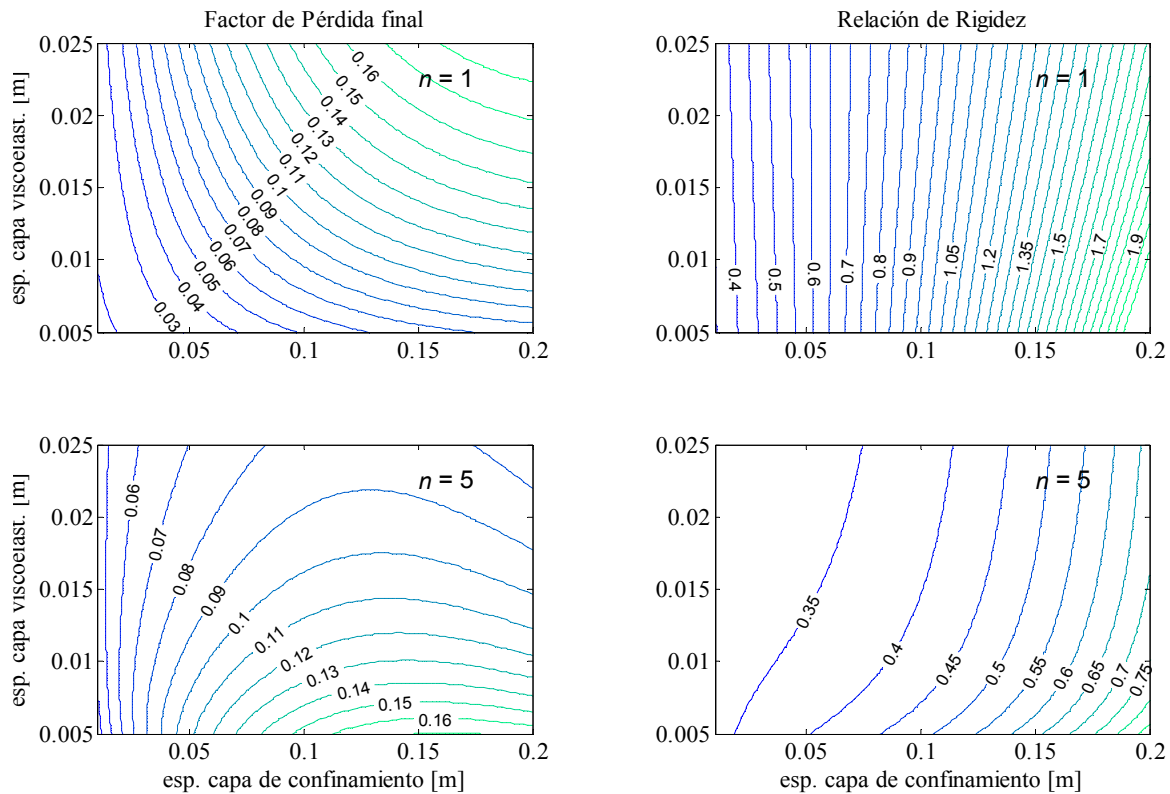


Fig. 11. Factor de pérdida final (izq.) y Factor de rigidez comparativa (der.) obtenibles en el tratamiento superficial con capa viscoelástica.

Las dimensiones (largo, ancho) de losas de hormigón armado se establecen entre 5 y 20 m y los espesores entre 0.2 y 0.6 m en función de las dimensiones en planta. Otros parámetros de diseño son: la frecuencia propia vertical, asumidas entre 3 y 7 Hz, velocidades de propagación de ondas en el suelo entre 100 y 300 m/s y frecuencias excitatrices entre 0-50 Hz, que corresponde al rango más sensible del equipamiento, en general. De acuerdo con lo expresado se logran números de onda  $k$  entre 0 y 3 y factores  $\Omega$  entre 0 y 15 aproximadamente. Los valores del parámetro  $\alpha$  considerados se sitúan entre 0.2 y 0.7, mientras que el número de onda adimensional  $\kappa$  toma valores entre 0.3 y 6.

En función de lo anteriormente expuesto se resumen los parámetros de importancia, su efecto en la transmisibilidad y los criterios de manipulación.

- La frecuencia propia vertical del aislamiento, que escala a las frecuencias de excitación presentes definiendo al parámetro  $\Omega$ , y la relación de amortiguamiento del sistema de aislamiento (supuesto viscoso)  $\xi$  son parámetros estándar en aislamiento de vibraciones de cuerpos rígidos. Como en este último caso, es menester reducir en lo posible a ambos, sin embargo, debe llegarse a un compromiso frente a elevados desplazamientos estáticos o a las excesivas amplificaciones dinámicas en resonancia que una disminución de estos parámetros puede causar, respectivamente.
- El ángulo de incidencia de las ondas modifica la proporción de excitación de los modos longitudinales y transversales, mientras que las dimensiones largo y ancho de las losas definen básicamente distintos parámetros  $\kappa$  según la ecuación (7). Los parámetros  $\kappa$  suficientemente pequeños contribuyen a mitigar los efectos de la flexión de las losas, sin embargo, el control sobre este parámetro puede resultar bastante limitado. En efecto, la longitud de la losa sólo puede reducirse por medio de la partición de la superficie original en superficies parciales y de forma que estas respondan independientemente. Vinculaciones entre losas asociadas a una menor cantidad

de GL restringidos (articulaciones, barras de corte, por ej.) no necesariamente mejoran en forma significativa la respuesta, por no reducir efectivamente el parámetro en relación con las complicaciones de diseño originadas. Además la velocidad de propagación del medio local puede sólo aumentarse en forma aparente construyendo losas de fundación unificadas para lograr un apoyo de los aisladores, y aprovechando la mayor velocidad de propagación en el hormigón.

- De la ecuación (43) se tiene que el factor de pérdida de la losa disminuye la transmisibilidad modal eficientemente lo que pone en evidencia la utilidad de controlar ese parámetro. De acuerdo con el análisis efectuado, factores de pérdida finales de la losa en el rango de 0.05 a 0.2 son razonables de manera de eliminar la mayor parte del efecto indeseable de las amplificaciones.
- El parámetro  $\alpha$  debe aumentarse en lo posible, evitando los picos flexionales dentro del rango de frecuencias de interés y acoplamientos con las frecuencias propias del aislamiento, esto parece más factible en losas de protección acústica, que para la presente aplicación en particular.
- La Fig. 5 establece las zonas de máxima transmisibilidad en función de los parámetros  $\alpha$ ,  $\kappa$ ,  $\Omega$  y  $\eta$ , por lo que puede utilizarse para verificar cualquier combinación de parámetros y estimar la frecuencia y magnitud de los puentes de transmisibilidad en función de una excitación conocida.

## 6. CONCLUSIONES

El estudio de la respuesta dinámica de pisos aislados de vibraciones, mediante la construcción de losas flexibles con sistemas de apoyos elásticos en la base, se extiende a frecuencias de análisis relativamente altas y gran cantidad de modos, por lo que las transmisibilidades dependen fuertemente de la localización del punto de análisis sobre la losa, además de otros numerosos parámetros. Por este motivo se utilizó en este trabajo el concepto de transmisibilidad local máxima, que resulta conservativa y útil para el diseño de sistemas.

Se realizó un análisis paramétrico exhaustivo con el fin de mejorar la comprensión del fenómeno de transmisibilidad de vibraciones en vigas flexibles excitadas con trenes de ondas desde la base y derivar criterios para el diseño de losas flotantes. Del análisis cuantitativo de la elevada cantidad de los parámetros identificados se concluye que en el caso de pisos aislados resulta antieconómico aumentar las frecuencias de los modos flexionales (vinculadas al parámetro  $\alpha$ ) lo suficiente para evitar excitarlos, tal como suele ser la condición de diseño de los bloques de fundación de maquinaria pesada. Por esta razón se trata de cuantificar, controlar y minimizar los efectos de las resonancias flexionales en el diseño. En lo posible resulta conveniente mantener acotado el valor máximo del parámetro  $\kappa$  de diseño, lo que puede lograrse evitando dimensiones excesivas en planta de la losa.

De acuerdo con el análisis previo realizado, el incremento del factor de pérdida de la losa resulta una medida efectiva para disminuir la transmisibilidad, y puede materializarse mediante el agregado de una capa de material viscoelástico confinada. El uso de este tratamiento resulta económicamente factible y recomendable, aunque sea menester un rediseño completo del sistema, debido al importante espesor de la capa de confinamiento necesario para lograr amortiguamientos que minimicen la respuesta. Una concepción amortiguada de la losa, compuesta por una losa principal de soporte, una capa de material viscoelástico con alto factor de pérdida y una losa superficial de tránsito resulta una medida eficaz para atenuar los efectos de las resonancias. El incremento de amortiguamiento del sistema de aislamiento, en cambio, no resulta efectivo y es antiproducente a estos efectos.

Por medio de modelos simplificados de viga resulta posible definir una *transmisibilidad modal envolvente*, que resulta una función de la frecuencia, de la relación de amortiguamiento viscoso de los aisladores y del factor de pérdida del material de la losa. Debido al carácter de envolvente, sus valores no son esperables en todo el rango de frecuencias, sino en la forma de “puentes de transmisibilidad” en el sistema, que tienen lugar bajo condiciones verificables de relaciones de los parámetros adimensionales de diseño. Los puentes de transmisibilidad pueden ser evitados, o en su defecto, la transmisibilidad máxima de los picos estimada.



Las curvas de transmisibilidad modal envolvente calculadas para una viga equivalente con el factor de pérdida en forma paramétrica puede utilizarse como referencia conservativa de diseño en estructuras similares. El rango de aplicación de la envolvente puede ser verificada en forma gráfica en función de los parámetros adimensionales. Las magnitudes de las envolventes muestran que aun en presencia de tratamientos para incrementar el amortiguamiento, los valores posibles y esperables de transmisibilidad son varias veces superiores a lo que puede predecirse con un modelo de 1 GLD.

## REFERENCIAS

- [1] Saurenmann, H.J., Nelson, J.T., Wilson, G.P., Handbook of urban rail noise and vibration control, Report UMTA-MA-06-0099-82-2 (1982)
- [2] Lombaert, G., Degrande, G., Clouteau, D., “Numerical modelling of free field traffic induced vibrations”, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **19**(7), 473-488 (2000)
- [3] Lombaert, G., Degrande, G., Vanhauwere, B., Vandeborghht, B. François, S., “The control of ground-borne vibrations from railway traffic by means of continuous floating slabs”, *Journal of Sound and Vibrations*, **297**(3-5), 946-961 (2006)
- [4] Kawaharazuka, T., Hiramatsu, T., Ohkawa, H., Koyasu, M., “Experimental study on vibration reduction by isolated railway”, *Internoise*, **96**, 1549-1552 (1996)
- [5] Cox, S.J., Wang, A., Morrison, C., Carels, P., Kelly, R., Bewes, O.G., “A test rig to investigate slab track structures for controlling ground vibration”, *Journal of Sound and Vibration*, **293**(3-5), 901-909 (2006)
- [6] Hui, C.K., Ng, C.F., “Attenuation of flexural vibration for floating floor and floating box induced by ground vibration”, *Applied Acoustics*, **70**(6), 799-812 (2009)
- [7] Hui, C.K., Ng, C.F., “The effects of floating slab bending resonances on the vibration isolation of rail viaduct”, *Applied Acoustics*, **70**, 830-844 (2009)
- [8] Clough, R.W., Penzien, J., *Dynamics of Structures*, Second edition, McGraw Hill (1993)
- [9] Balachandran, B., Magrab, E.B., *Vibrations*, Thomson Learning (2009)
- [10] Przemieniecki, J.S., *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw Hill (1985)
- [11] Ross, D., Ungar, E.E., Kerwin, E.M.Jr., “Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminate. Structural Damping”, ASME, New York, 49-88 (1959)
- [12] Mead, D.J., *Passive Vibration Control*, John Wiley & Sons Ltd. (1999)

## DESIGN OF FLOATING FLOORS, SUITABLE FOR SUPPORTING VIBRATION-SENSITIVE EQUIPMENT, IN INDUSTRIAL PLANTS

**Abstract** – The installation of modern sensitive equipment in industrial plants, where high vibration levels are usual, is becoming increasingly frequent. Appropriate mountings are required to satisfy the specifications of the equipment manufacturer with respect to the maximal tolerated limits. An alternative solution to the elastic mounting of individual equipment, is the construction of isolated surfaces or floating floors, which provides greater flexibility in the layout. Simplified models of one degree of freedom are frequently used for the design of floating floors, disregarding the influence of flexural flexibility of the slabs and the contribution of flexional modes to the response. A rigid base excitation is also a simplification compared with the real excitation consisting of wave trains propagated by the base area where spring elements are supported. The present paper deals with the investigation of the dynamic response of floating floors excited through the isolation system by Rayleigh waves, which propagate in the homogeneous half-space of soil, taking also into account the flexibility of the slabs. The effectiveness of isolation is quantified from the slab maximum displacement calculated in the frequency domain for an excitation with bandwidth within the range of interest of typical commercial equipment. The analysis begins analytically calculating the transmissibility of beams, from which the concepts of modal transmissibility and envelope modal transmissibility are derived. These parameters coming from a one-dimensional structure are suitable to be used as a reference in the design of industrial floating slabs. Based on an example of a typical floating floor of a metrology room, we compare results obtained with a finite element model with those provided by the equivalent beam model proposed in this article.

**Keywords** – Sensitive equipment, Floating floors, Vibration isolation.